Eberhard Karls
Universität
Tübingen

Fakultät für Informations- und Kognitionswissenschaften
Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik

Vorkurs Mathematik

Barbara Rakitsch und Thomas Nestmeyer

Oktober 2009

Vorwort

Dieses Skript ist für den Vorbereitungskurs Mathematik des WSI. Es soll sowohl eine Wiederholung von Schulwissen sein, als auch einen ersten Eindruck der Mathematik im Studium und insbesondere deren Notation vermitteln.

Wer Fehler findet wird ausdrücklich gebeten, einem von uns, das heißt Barbara Rakitsch (b.rak@onlinehome.de) oder Thomas Nestmeyer (T.Nestmeyer@arcor.de), eine Mail zu schreiben. Auch bei sonstigen Fragen könnt ihr euch gerne an uns wenden.

Als Quelle diente hauptsächlich das Buch „Mathematik für Informatik und BioInformatik" von Wolff, Hauck und Küchlin.

Viel Spaß im Studium!

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik **6**
1.1 Beispiele von Aussagen . . . 6
1.2 Definition . . . 6
1.3 Verknüpfungen . . . 6
1.4 Übungen . . . 7

2 Mengen **10**
2.1 Definition (Georg Cantor, 1895) . . . 10
2.2 Beispiele . . . 10
2.3 Schreibweise . . . 10
2.4 Zahlbereiche . . . 10
2.5 Quantoren . . . 10
2.6 Verknüpfungen . . . 11
2.7 Grundbegriffe . . . 11
2.8 Gesetze . . . 12
2.9 Übungen . . . 13

3 Elementare Rechenoperationen **15**
3.1 Begriffe . . . 15
3.2 Lösungen von Gleichungen . . . 15
3.3 Binomische Formeln . . . 17
3.4 Betrag . . . 17
3.5 Bruchrechnung . . . 17
3.6 Potenzen . . . 19
3.7 Wurzeln . . . 21
3.8 Logarithmen . . . 22

4 Summen- und Produktzeichen **24**
4.1 Summenzeichen . . . 24
4.2 Produktzeichen . . . 25
4.3 Fakultät und Binomialkoeffizient . . . 27

5 Beweise **28**
5.1 Behauptung - Beweis . . . 28
5.2 Axiome . . . 28
5.3 Begriffe . . . 28
5.4 Genau dann, wenn . . . 29
5.5 Quantoren . . . 29
5.6 Zyklisches Beweisverfahren . . . 30
5.7 Indirekte Beweise . . . 30
5.8 Fallunterscheidung . . . 31
5.9 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit . . . 32
5.10 Vollständige Induktion . . . 33

6 Abbildungen **37**
6.1 Definition . . . 37
6.2 Injektive Abbildungen . . . 37
6.3 Surjektive Abbildungen . . . 38

6.4 Bijektive Abbildungen . . . 38
6.5 Übungen . . . 38
6.6 Hintereinanderausführung von Abbildungen . . . 39
6.7 Umkehrabbildung . . . 40
6.8 Kardinalität von Mengen . . . 40
6.9 Hilbert's Hotel . . . 40
6.10 Mathematisches Analogon . . . 41

7 Folgen **43**
7.1 Definition . . . 43
7.2 Beispiele . . . 43
7.3 Beobachtungen . . . 44
7.4 Beschränkte Folgen . . . 44
7.5 Konvergente Folgen, Grenzwert . . . 44
7.6 Cauchys Konvergenzkriterium . . . 45

8 Funktionen **46**
8.1 Definition . . . 46
8.2 Geometrische Interpretation . . . 46
8.3 Intervalle . . . 46
8.4 Elementarfunktionen . . . 46
8.5 Monotonie . . . 47
8.6 Umkehrfunktionen . . . 47
8.7 Wichtige Funktionen . . . 48
8.8 Stetigkeit . . . 50
8.9 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . 52

9 Differentialrechnung **53**
9.1 Sekante . . . 53
9.2 Tangente . . . 53
9.3 Ableitung . . . 53
9.4 Differenzierbarkeit . . . 53
9.5 Stetig differenzierbar . . . 53
9.6 Ableitungsregeln . . . 54
9.7 Übungen . . . 54
9.8 Zusammenhang von Monotonie und Ableitung . . . 55
9.9 Lokale Extrema . . . 55
9.10 Mittelwertsatz . . . 56

10 Relationen **57**
10.1 Definition . . . 57
10.2 Beispiele . . . 57
10.3 Äquivalenzrelation . . . 57
10.4 Ordnungsrelation . . . 59

11 Komplexe Zahlen **61**
11.1 Motivation . . . 61
11.2 Definition . . . 61
11.3 Gaußsche Zahlenebene . . . 61
11.4 Rechenregeln . . . 61
11.5 Betrag . . . 62

11.6 Fundamentalsatz der Algebra 62
11.7 Übungen 62

12 Algebra 63
12.1 Halbgruppen 63
12.2 Monoide 65
12.3 Gruppen 66
12.4 Übungen 68

13 Lineare Gleichungssysteme 69
13.1 Beispiele 69
13.2 Zusammenfassung der drei möglichen Fälle 72

Griechisches Alphabet

Großbuchstabe	Kleinbuchstabe	Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
E	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

1 Aussagenlogik

1.1 Beispiele von Aussagen

1. Alle Professoren sind Menschen.
2. Alle Menschen sind Professoren.
3. Wenn Weihnachten und Ostern auf einen Tag fällt, dann bekommt jeder Teilnehmer des Vorkurses ein Mensaessen vom Tutor geschenkt.
4. Es gibt Außerirdische.

Wir erkennen, dass Aussage 1 immer wahr ist, während Aussage 2 nicht wahr ist, so lange es Menschen gibt, die keine Professoren sind.
Die dritte Aussage besteht aus zwei Teilaussagen: „Weihnachten und Ostern fallen auf einen Tag" und „Jeder Teilnehmer des Vorkurses bekommt ein Mensaessen vom Tutor geschenkt". Vorausgesetzt Weihnachten und Ostern fallen auf einen Tag, dann muss der Tutor die Mensaessen ausgeben, damit die Aussage wahr ist. Solange das jedoch nicht passiert, kann der Tutor machen was er will und die Gesamtaussage ist wahr.
Der Wahrheitswert der vierten Aussage ist (wenigstens im Moment) nicht zu beantworten, da niemand weiß, ob Außerirdische existieren.

1.2 Definition

Wir sprechen von einer Aussage im mathematischen Sinne, wenn diese einen eindeutigen Wahrheitswert annimmt. Dieser Wahrheitswert kann beschrieben werden durch {wahr, falsch}, {true, false} oder $\{1, 0\}$. Wir werden im Folgenden stets die Bezeichnungen 0 für Aussage nicht erfüllt und 1 für Aussage erfüllt verwenden.

1.3 Verknüpfungen

Seien A und B Aussagen.

1. Verneinung / Negation: $\neg A$ (gesprochen: „nicht A")

A	$\neg A$
0	1
1	0

2. Und / Konjunktion: $A \wedge B$ (gesprochen: „A und B")

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Oder / Disjunktion: $A \vee B$ (gesprochen: „A oder B")

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Wichtig ist, dass die Oder-Verknüpfung auch den „Und-Fall“ beinhaltet: $A \vee B$ ist wahr, wenn die Aussage A oder die Aussage B wahr ist, aber auch wenn beide Aussagen wahr sind.

Wenn wir fordern wollen, dass wirklich nur *eine* der beiden Aussagen wahr ist, verwenden wir das exklusive Oder.

4. Exklusives Oder / XOR: $(A \oplus B)$ (gesprochen: „Entweder A oder B “)

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Beispiel: Entweder wir fahren mit dem Bus, oder wir fahren mit dem Rad.

5. Folgerung / Implikation: $A \Rightarrow B$ (gesprochen: „Wenn A, dann B“, oder „Aus A folgt B“)

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A \Rightarrow B$ ist also wahr, wenn die Aussage A und die Aussage B wahr sind oder wenn die Aussage A falsch ist.

Beispiel: Aussage 3 von oben.

6. Gleichheit / Äquivalenz: $A \iff B$, manchmal auch $A \equiv B$ (gesprochen: „A genau dann, wenn B“)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel: Eine Zahl ist genau dann Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch Eins teilbar ist.

Wenn man die Äquivalenz verneint (Antivalenz genannt), ergibt sich die gleiche Wahrheitstafel wie die bei XOR. Für die Antivalenz schreiben wir $A \not\equiv B$. Aufgrund der Gleichheit der Wahrheitstafeln sehen wir die Aussagen $A \oplus B$ und $A \not\equiv B$ als äquivalent an.

1.4 Übungen

1.4.1 Beweis der Äquivalenz von $\mathbf{A \Rightarrow B}$ und $\mathbf{\neg A \vee B}$

Dies bestimmen wir, indem wir die Wahrheitstafeln der beiden Aussagen aufstellen und miteinander vergleichen.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Da die beiden Spalten $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ die gleichen Einträge haben, sind die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ äquivalent.

1.4.2 Genau dann, wenn

Ist $A \iff B$ äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$?

A	B	$A \iff B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

1.4.3 Assoziativgesetz

Ist $(A \vee B) \vee C$ äquivalent zu $A \vee (B \vee C)$?

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$(B \vee C)$	$A \vee (B \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Analog zeigt man auch das Assoziativgesetz für das logische „Und“:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

1.4.4 DeMorgan'sche Regeln

Ist $\neg(A \vee B)$ äquivalent zu $\neg A \wedge \neg B$?

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Analog zeigt man auch, dass $\neg(A \wedge B)$ äquivalent ist zu $\neg A \vee \neg B$.

1.4.5 Distributivgesetze

Ist $A \wedge (B \vee C)$ äquivalent zu $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$?

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B)$	$(A \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Analog zeigt man auch, dass $A \vee (B \wedge C)$ äquivalent ist zu $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

2 Mengen

2.1 Definition (Georg Cantor, 1895)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens (welche Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

2.2 Beispiele

- $\{1, 2, 3\}$
- $\{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ (einfaches, 32-Blatt-Kartenspiel)
- $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega\}$ (griechisches Alphabet)
- {Mercedes, BMW, Porsche, Audi, VW}
- {5, a, A, Haus, Zahl}
- $\emptyset := \{\}$ Leere Menge

2.3 Schreibweise

- $M := \{a, b, c, ...\}$
  gesprochen: „M wird definiert als die Menge aus den Elementen $a, b, c, \ldots$“
- $a \in M$
  gesprochen: „a ist ein Element von M“ oder kurz „a Element M“
- $1 \notin M$
  gesprochen: „1 ist nicht Element von M“ oder „1 ist kein Element von M“
- $\{x \in M : x \text{ hat die Eigenschaft } \ldots\}$, oft auch $\{x \in M \mid x \text{ hat die Eigenschaft } \ldots\}$
  gesprochen: „Die Menge aller x aus M, für die gilt x hat die Eigenschaft ...“

2.4 Zahlbereiche

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen (ohne 0)
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	positive reelle Zahlen. Analog für $\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$.
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

2.5 Quantoren

- $\forall x \in M$ (Allquantor oder Universalquantor)
  gesprochen: „Für alle $x \in M$“

  Beispiel: $\forall x \in \{2, 3, 5\} : x \leq 5$

- $\exists x \in M$ (Existenzquantor)
  gesprochen: „Es existiert ein $x \in M$“
  Beispiel: $\exists x \in \{3, 5, 7\} : x \leq 5$
- Vorsicht: $\exists$ schließt nicht aus, dass auch $\forall$ gelten kann!
  Beispiel: $\exists x \in \{2, 3, 5, 7\} : x \leq 10$
- Die Quantoren können auch hintereinander benutzt werden, wobei die Reihenfolge wichtig ist!

  Beispiele: $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$ (ist erfüllt mit $y = \frac{1}{x}$)
  $\exists y \in \mathbb{R} : \forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : xy = 1$ (ist nicht erfüllt, da es keine Zahl gibt, die mit *jeder* Zahl $\neq 0$ multipliziert Eins ergibt)
  „kompliziertes“ Beispiel: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) : |a - a_n| < \varepsilon$

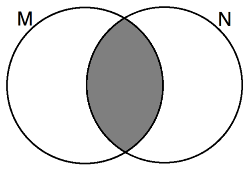
2.6 Verknüpfungen

Seien im Folgenden M und N stets Mengen.

2.6.1 Schnitt

$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$
Beispiel:
Für $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$
ist $M \cap N = \{4\}$.

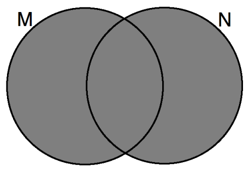
Venn-Diagramm:



2.6.2 Vereinigung

$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$
Beispiel:
Für $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$
ist $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Venn-Diagramm:

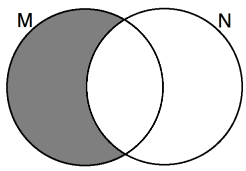


2.6.3 Differenzmenge

$M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$
Beispiel:
Für $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$
ist $M \setminus N = \{1, 2, 3\}$.

Anstatt $M \setminus N$ schreibt man manchmal auch N^c (sprich „N Komplement“), wenn klar ist, welche Obermenge (hier M) gemeint ist.

Venn-Diagramm:



2.7 Grundbegriffe

2.7.1 Disjunkte Mengen

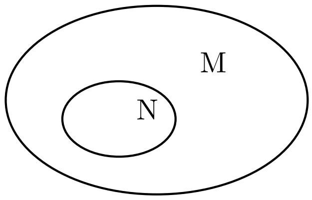
Wenn $M \cap N = \emptyset$, also wenn M und N keine gemeinsamen Elemente besitzen, sagt man M und N sind disjunkt.

2.7.2 Teilmenge

Gilt $x \in N \Rightarrow x \in M$ oder analog $\forall x \in N : x \in M$, so schreiben wir $N \subseteq M$ und sagen „N ist Teilmenge von M".

Anstatt $N \subseteq M$ schreiben wir auch $M \supseteq N$ und sagen „M ist Obermenge von N", falls dies im Kontext geschickter erscheint.

Venn-Diagramm:



2.7.3 Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ enthält alle Teilmengen von M, also $\mathcal{P}(M) := \{X : X \subseteq M\}$.

Beispiel: Ist $M := \{1, 2\}$, dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

2.7.4 Kartesisches Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nichtleere Mengen.
Dann heißt die Menge der *geordneten* n-Tupel

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n\}$$

kartesisches Produkt oder auch Kreuzprodukt.

Beispiel: $\{a, b, c\} \times \{0, 1\} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$

Behauptung: Das Kartesische Produkt ist nicht kommutativ.

Beweis: Da Tupel geordnet sind, gilt $(x, y) \neq (y, x)$ für beliebige $x \neq y$ und damit
$\{0, 1\} \times \{a, b, c\} = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\} \neq \{a, b, c\} \times \{0, 1\}$ □

2.7.5 Äquivalenz zweier Mengen

Gilt $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$, so heißen die beiden Mengen M und N gleich (Schreibweise $M = N$).
Dann ist jedes Element aus M auch Element von N und umgekehrt.

2.8 Gesetze

2.8.1 DeMorgan'sche Regeln

Seien M, N Mengen.

Behauptung: Es gilt $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$.

Beweis: Wir müssen die zwei Richtungen $(M \cap N)^c \subseteq M^c \cup N^c$ und $(M \cap N)^c \supseteq M^c \cup N^c$ zeigen.

'$\subseteq$' Sei $x \in (M \cap N)^c$ beliebig.
Also ist $x \notin (M \cap N)$ oder anders geschrieben $\neg(x \in (M \cap N))$. Nach Definition des Schnitts also $\neg((x \in M) \wedge (x \in N))$ und mit den DeMorgan'schen Regeln für Aussagen (1.4.4) $\neg(x \in M) \vee \neg(x \in N)$, was wieder „normal" geschrieben bedeutet $x \notin M \vee x \notin N$. Das heißt $x \in M^c \vee x \in N^c$ und somit nach Definition der Vereinigung $x \in (M^c \cup N^c)$.
Insgesamt haben wir also für beliebiges x gezeigt: $x \in (M \cap N)^c \Rightarrow x \in (M^c \cup N^c)$ und damit $(M \cap N)^c \subseteq M^c \cup N^c$.

'$\supseteq$' Dieses Mal fassen wir uns etwas kürzer:
Sei $x \in (M^c \cup N^c)$.
Also ist $x \in M^c$ oder $x \in N^c$ und damit $x \notin M$ oder $x \notin N$. Das heißt $x \notin (M \cap N)$, also $x \in (M \cap N)^c$.
Insgesamt haben wir also gezeigt: $x \in (M^c \cup N^c) \Rightarrow x \in (M \cap N)^c$ und damit $M^c \cup N^c \subseteq (M \cap N)^c$.

Wir haben also beide Richtungen gezeigt und damit gilt die Behauptung. □

Analog beweist man die zweite DeMorgan'sche Regel: $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$.

2.8.2 Assoziativität der Vereinigung

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen.

Behauptung: Es gilt $(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$

Beweis: Wir zeigen hier beide Richtungen auf einmal:

$$\begin{aligned}
x \in ((M_1 \cup M_2) \cup M_3) &\overset{(2.6.2)}{\Longleftrightarrow} (x \in (M_1 \cup M_2)) \vee (x \in M_3) \\
&\overset{(2.6.2)}{\Longleftrightarrow} ((x \in M_1) \vee (x \in M_2)) \vee (x \in M_3) \\
&\overset{(1.4.3)}{\Longleftrightarrow} (x \in M_1) \vee ((x \in M_2) \vee (x \in M_3)) \\
&\overset{(2.6.2)}{\Longleftrightarrow} (x \in M_1) \vee (x \in (M_2 \cup M_3)) \\
&\overset{(2.6.2)}{\Longleftrightarrow} x \in (M_1 \cup (M_2 \cup M_3))
\end{aligned}$$

□

Aus diesem Grund können wir die Klammern auch weglassen, wir schreiben also $M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

Analog zeigt man auch, dass $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$ gilt.

2.9 Übungen

Aufgabe 1

Betrachte:
$M_1 := \{1, 2\}$
$M_2 := \{2, 3\}$
$M_3 := \{X, y, 3\}$
$M_4 := \{x, y, z\}$
$M_5 := \{2, 4, 6\}$

Bestimme:

1. $M_1 \cap M_2 = \{2\}$
2. $M_2 \cap M_3 = \{3\}$
3. $M_3 \cup M_4 = \{X, y, 3, x, z\}$
4. $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 = \{1, 2, 3, X, y, x, z, 4, 6\}$
5. $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5 = \emptyset$

6. $\mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{X\}, \{y\}, \{3\}, \{X, y\}, \{X, 3\}, \{y, 3\}, \{X, y, 3\}\}$
7. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
8. $M_1 \times M_2 \times M_3 = \{ (1,2,X), (1,2,y), (1,2,3), (1,3,X), (1,3,y), (1,3,3),$
   $(2,2,X), (2,2,y), (2,2,3), (2,3,X), (2,3,y), (2,3,3)\}$
9. Bestimme alle Paare disjunkter Mengen:
   $\{\{M_1, M_3\}, \{M_1, M_4\}, \{M_2, M_4\}, \{M_3, M_5\}, \{M_4, M_5\}\}$
10. $M_1 \setminus M_2 = \{1\}$
11. $M_3 \setminus M_4 = \{X, 3\}$
12. Gilt $(M_1 \cap M_2) \subseteq M_5$? Ja, weil $M_1 \cap M_2 = \{2\}$ und $2 \in \{2, 4, 6\}$, also $\{2\} \subseteq \{2, 4, 6\}$

Aufgabe 2

Gib die Elemente der folgenden Mengen an:

1. $\{x \in \mathbb{N} : x < 4\} = \{1, 2, 3\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{1, -1\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1\} = \{1, -1\}$
4. $\{x \in \mathbb{Z} : x < 100 \wedge \exists y \in \mathbb{Z} : y^2 = x\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

3 Elementare Rechenoperationen

3.1 Begriffe

3.1.1 Term

Ein Term ist ein mathematischer Ausdruck, der zum Beispiel aus Zahlen, Variablen, Klammern und Verknüpfungen (wie + oder $\cdot$) besteht.
Grob gesprochen sind Terme also die korrekten Wörter der mathematischen Sprache.

Beispiele für Terme	Keine gültigen Terme
23	$)5-3)$
$5x+3$	$4+:3$
$\frac{1}{2}\cdot(4+8)$	$a\cdot$

3.1.2 Formel

Setzen wir Terme mit Vergleichsoperatoren ($=, \ \leq, <, \geq, >, \neq$) zusammen, erhalten wir Formeln.
Beispiel: $a^2+b^2=c^2$ oder $|a+b| \leq |a|+|b|$.
Für Formeln der Form $a^2+b^2=c^2$ sagen wir meist Gleichung, für $|a+b| \leq |a|+|b|$ Ungleichung.

3.1.3 Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen sind diejenigen Umformungen, welche den Wahrheitsgehalt einer Formel erhalten. Dazu gehören Addition und Subtraktion von beliebigen Zahlen und Multiplikation und Division mit beliebigen Zahlen $\neq 0$ auf beiden Seiten. Bei Multiplikation und Division mit negativen Zahlen muss dabei bei Ungleichungen der Vergleichsoperator „herumgedreht" werden ($\leq \leftrightarrow \geq, \quad < \leftrightarrow >$). Vorsicht aber wenn Variablen vorkommen, da dann nicht immer sofort offensichtlich ist, ob mit negativen Werten oder Nullwerten multipliziert / dividiert wird.

3.2 Lösungen von Gleichungen

Haben wir zwei Terme T_1 und T_2, in denen eine Variable vorkommt, so möchten wir herausfinden, für welche(n) Wert(e) der Variablen die Gleichung $T_1 = T_2$ erfüllt ist. Da sich dies umformen lässt zu $T_1 - T_2 = 0$, können wir also die Nullstellen des Terms $T_1 - T_2$ bestimmen.

3.2.1 Geraden

Die Nullstellen eines Terms $ax+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bestimmen wir duch einfaches Umstellen:

$$ax+b=0 \iff x=-\frac{b}{a}$$

Zu diesem Problem gibt es also immer genau eine Lösung.

3.2.2 Parabeln

Die Nullstellen eines Terms ax^2+bx+c mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ finden wir mithilfe der „Mitternachtsformel":

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

In Abhängigkeit der Diskriminanten $\Delta = b^2-4ac$ können wir die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung $ax^2+bx+c=0$ bestimmen:

- Ist $\Delta > 0$, so gibt es *zwei* Lösungen.
- Ist $\Delta = 0$, so gibt es *eine* Lösung.
- Ist $\Delta < 0$, so gibt es *keine* Lösung.

Die „p-q-Formel“ ist zur „Mitternachtsformel“ äquivalent. Betrachte dazu die Umbenennung $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$ und folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 + px + q = 0 \\ &\iff x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Beispiel: Bestimme die Nullstellen von $x^2 + 5x + 6$.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -3$$

3.2.3 Polynome

Haben wir Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, dann nennen wir einen Term der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ein Polynom. Die Spezialfälle Gerade $a_1 x + a_0$ und Parabel $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ haben wir eben besprochen.

3.2.4 Polynomdivision

Die Nullstellen eines allgemeinen Polynoms zu finden, ist sehr schwer, da es hierzu keine Formel gibt, in die wir einfach einsetzen können. Es bleibt uns also nur die Möglichkeit, eine Nullstelle zu erraten und das Polynom durch Polynomdivision dann zu „vereinfachen“. Schaffen wir es, das Polynom soweit zu vereinfachen, dass ein quadratisches Polynom übrig bleibt, können wir mit der Mitternachtsformel die übrigen zwei Nullstellen berechnen. Ist x_0 eine erratene Nullstelle, so müdden wir bei der Polynomdivision durch $(x - x_0)$ dividieren. Da wir wissen, dass es sich hierbei um eine Nullstelle handelt, darf bei dieser Division kein Rest übrig bleiben.

Wir betrachten nun folgendes Beispiel, an dem der allgemeine Algorithmus klar werden sollte:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 + 5x^2 + 9x + 5\big) : \big(x + 1\big) = x^2 + 4x + 5 \\ \underline{-\,x^3 \ -x^2} \\ \qquad\quad 4x^2 + 9x \\ \qquad\ \underline{-\,4x^2 - 4x} \\ \qquad\qquad\quad 5x + 5 \\ \qquad\qquad\ \underline{-\,5x - 5} \\ \qquad\qquad\qquad\ 0 \end{array}$$

Übung: Finde die Nullstellen von $x^3 - 2x^2 - 29x - 42$. *Hinweis:* Eine Nullstelle ist 7.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - 2x^2 - 29x - 42\big) : \big(x - 7\big) = x^2 + 5x + 6 \\ \underline{-\,x^3 + 7x^2} \\ \qquad\quad 5x^2 - 29x \\ \qquad\ \underline{-\,5x^2 + 35x} \\ \qquad\qquad\quad 6x - 42 \\ \qquad\qquad\ \underline{-\,6x + 42} \\ \qquad\qquad\qquad\ 0 \end{array}$$

Also ist die Menge der Nullstellen: $\{-3, -2, 7\}$, da x^2+5x+6, wie schon bei der Mitternachtsformel gesehen, die Nullstellen -3 und -2 hat.

3.2.5 Anzahl der Nullstellen eines Polynoms

Ein Polynom n-ten Grades, das heißt ein Polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$, hat maximal n reelle Nullstellen.

3.3 Binomische Formeln

Bestimmte Terme treten in der Mathematik immer wieder auf, sodass es für uns von Interesse ist, diese nicht jedes Mal ausrechnen zu müssen. Ein berühmtes Beispiel sind die drei binomischen Formeln, die schon ausgiebig in der Schule besprochen und benutzt wurden:

Behauptung: Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann rechnen wir einfach nach:

1. $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a + (-b)\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot(-b) = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a\cdot a + a\cdot(-b) + a\cdot(-b) + b\cdot(-b) = a^2 - b^2$

$\square$

3.4 Betrag

3.4.1 Definition

Der Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ wird definiert durch $|a| = a$, falls $a \geq 0$ und $|a| = -a$, falls $a < 0$.

Beispiele: $|5| = 5,\ |-3| = 3,\ |0| = 0$
$|x| = \sqrt{2} \iff x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$
$|x-5| = 7 \iff x-5 = 7$ oder $-(x-5) = 7 \iff x = 12$ oder $x = -2$.

3.4.2 Gesetze

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad \text{(Positivität)}$$
$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b| \qquad \text{(Homogenität)}$$
$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

3.5 Bruchrechnung

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist definiert durch $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$. Jedes Element aus $\mathbb{Q}$ heißt Bruch. Dabei ist a der Zähler und b der Nenner.

3.5.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Seien $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Gehen wir von links nach rechts erweitern wir den Bruch um Faktor k. Gehen wir stattdessen von rechts nach links, so kürzen wir mit k.
Enthält der Zähler oder der Nenner eine Summe, so muss jeder Summand k enthalten, damit man kürzen darf.

Seien im Folgenden $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$.

3.5.2 Negative Brüche

Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

3.5.3 Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche werden addiert / subtrahiert, indem beide Brüche auf den gleichen Nenner (Hauptnenner genannt) gebracht werden und anschließend die Zähler addiert / subtrahiert werden:

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 b_2} \pm \frac{a_2 \cdot b_1}{b_1 b_2} = \frac{a_1 b_2 \pm a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

3.5.4 Multiplikation von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem Zähler und Nenner jeweils multipliziert werden:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

3.5.5 Division von Brüchen

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert:

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

3.5.6 Übungen

1. Kürze:
   a) $\frac{64x}{18y} = \frac{32x}{9y}$
   b) $\frac{12xy+5y}{4xy-8xy} = \frac{12x+5}{4x-8x}$
   c) $\frac{56x^2y-16xy^2}{24yz+40y^2} = \frac{7x^2-2xy}{3z+5y}$
   d) $\frac{a^2-b^2}{5a+5b} = \frac{a-b}{5}$
2. Berechne:
   a) $\frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$

b)

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2+3xy}{5x-5y}-\frac{xy}{x-y} &= \frac{x^2+y^2+3xy}{5\cdot(x-y)}-\frac{5xy}{5\cdot(x-y)}\\ &= \frac{x^2+y^2+3xy-5xy}{5\cdot(x-y)}\\ &= \frac{x^2+y^2-2xy}{5\cdot(x-y)}\\ &= \frac{(x-y)^2}{5\cdot(x-y)}\\ &= \frac{x-y}{5}\end{aligned}$$

c) $\frac{4}{7x}\cdot\frac{21x}{8}=\frac{4\cdot 21x}{7x\cdot 8}=\frac{3}{2}$
d) $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{8}{56}+\frac{7}{56}=\frac{15}{56}$
e) $\frac{5a^2}{a-b}:\frac{35}{7a-7b}=\frac{5a^2}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{35}=\frac{5a^2\cdot 7(a-b)}{(a-b)\cdot 35}=a^2$
f) $\frac{4a}{3b}:\frac{7a}{9ab}:\frac{42ab}{5}=\left(\frac{4a}{3b}\cdot\frac{9ab}{7a}\right):\frac{42ab}{5}=\frac{4a\cdot 9ab}{3b\cdot 7a}:\frac{42ab}{5}=\frac{4a\cdot 3}{7}\cdot\frac{5}{42ab}=\frac{12a\cdot 5}{7\cdot 42ab}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 7b}=\frac{10}{49b}$

3. Löse die Gleichungen:
   a) $\frac{3z-8}{3z+8}=\frac{1}{2} \iff (3z-8)\cdot 2=3z+8 \iff 6z-16=3z+8 \iff 3z=24 \iff z=8$
   b)

$$\begin{aligned}&\frac{2x+1}{x+5}=\frac{2x-1}{x+2}\\ \iff &(2x+1)\cdot(x+2)=(2x-1)\cdot(x+5)\\ \iff &2x^2+4x+x+2=2x^2+10x-x-5\\ \iff &5x+2=9x-5\\ \iff &7=4x\\ \iff &x=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Motivation

Sei der Term $a^n=b$ gegeben.

- Ist a und n bekannt, können wir durch Potenzieren b bestimmen.
- Ist n und b bekannt, können wir durch Wurzelziehen a bestimmen.
- Ist a und b bekannt, können wir durch Logarithmieren n bestimmen.

3.6 Potenzen

3.6.1 Definition

Seien im Folgendem $a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0$.

Dann ist die n-te Potenz von a definiert durch

$$a^n=\begin{cases}1 & \text{für } n=0\\ a^{n-1}\cdot a & \text{für } n>0\end{cases}$$

dabei heißt a Basis und n Exponent. Dies bedeutet anschaulich $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$.

Damit gilt insbesondere $0^0 = 1$ und $\forall n \neq 0 : 0^n = 0$.
Für $n \in \mathbb{Z}$ erweitern wir obige Formel mit $a^n = \left(a^{-1}\right)^{-n}$, falls $n < 0$.

3.6.2 Potenzgesetze

Seien im Folgenden $a, b \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
3. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
4. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3.6.3 Übungen

1. Berechne:
   a) $2^{10} = 1024$
   b) $(-2)^3 = -8$
   c) $2^{-3} = \frac{1}{8}$

2. Fasse zusammen:
   a) $5^2 3x^3 y^3 z^2 \cdot 5^2 3^3 xyz^2 = 5^4 3^4 x^4 y^4 z^4 = (5 \cdot 3xyz)^4 = (15xyz)^4$
   b) $3^2 a^{-2} b^5 \cdot 3^{-1} a^2 b^{-3} = 3^{2-1} \cdot a^{-2+2} \cdot b^{5-3} = 3^1 \cdot a^0 \cdot b^2 = 3 \cdot 1 \cdot b^2 = 3b^2$
   c) Achtung: Potenz vor Punkt vor Strich!

$$\begin{aligned}
-63ab^3 - (4ab)^3 \cdot 2^{-1} \cdot (-10a^{-2}) &= -63ab^3 - 64a^3b^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2a^{-2}) \\
&= -63ab^3 - 32a^3b^3 \cdot (-2a^{-2}) \\
&= -63ab^3 + 64a^{3-2}b^3 \\
&= -63ab^3 + 64ab^3 \\
&= ab^3
\end{aligned}$$

   d) $\frac{x^{10}x^n}{y^7 y^{-m} x^3} = x^{10+n-3} y^{m-7} = x^{n+7} y^{m-7}$
   e)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^2}{b^n} : \frac{a^3}{b^2}\right)^{-2} : \frac{a^2}{b^4} &= \left(\frac{a^2}{b^n} \cdot \frac{b^2}{a^3}\right)^{-2} \cdot \frac{b^4}{a^2} \\
&= \left(a^2 b^{-n} \cdot b^2 a^{-3}\right)^{-2} \cdot b^4 a^{-2} \\
&= \left(a^{-1} b^{-n+2}\right)^{-2} b^4 a^{-2} \\
&= a^2 b^{2n-4} \cdot b^4 a^{-2} \\
&= b^{2n}
\end{aligned}$$

3.7 Wurzeln

3.7.1 Definition

Seien $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Gleichung $b^n = a$ eine eindeutig bestimmte nichtnegative Lösung für b. Diese wird als die n-te Wurzel von a (in Zeichen: $\sqrt[n]{a}$) bezeichnet. Die Zahl a heißt Radikand.
Damit gilt insbesondere auch $\sqrt{x^2} = |x|$.

3.7.2 Wurzelgesetze

Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}, n, k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

1. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = 1$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$

3.7.3 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Seien $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Potenz von a mit den Exponenten $\frac{1}{n}$ definiert durch

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Mithilfe der Wurzel-Gesetze können wir dadurch die Potenzgesetze auf rationale Exponenten erweitern.

3.7.4 Anzahl der Lösungen der Potenzgleichung

In Abhängigkeit von a und n kann man die Anzahl der Lösungen von b für $b^n = a$ bestimmen:

1. Für ein ungerades $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Lösung: $\sqrt[n]{a}$.
2. Für ein gerades n und $a > 0$ existieren sowohl eine positive Lösung $\sqrt[n]{a}$ als auch eine negative Lösung $-\sqrt[n]{a}$.
3. Für ein gerades n und $a < 0$ existiert keine reelle Lösung.

3.7.5 Übungen

1. Berechne:
   a) $7\sqrt{x} - \sqrt{25x} - \sqrt{2x} = 7\sqrt{x} - 5\sqrt{\times} - \sqrt{2x} = 2\sqrt{x} - \sqrt{2x}$
   b) $\sqrt{140} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{140 \cdot 7 \cdot 20} = 140$
   c) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(a+2\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(a-b)} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = 1$
   d) $\sqrt[7]{\sqrt[9]{x}} = \sqrt[63]{x}$
   e) $\frac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[7]{x^3}}}{\sqrt[7]{y^2 \cdot \sqrt{y}}} = \frac{\sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{3}{7}}}}{\sqrt[7]{y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt[4]{x^{\frac{10}{7}}}}{\sqrt[7]{y^{\frac{5}{2}}}} = \frac{x^{\frac{10}{28}}}{y^{\frac{5}{14}}} = \frac{x^{\frac{5}{14}}}{y^{\frac{5}{14}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{14}}$
2. Erweitere so, dass der Nenner rational wird:
   a) $\frac{7}{\sqrt{ab}} = \frac{7 \cdot \sqrt{ab}}{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}} = \frac{7\sqrt{ab}}{ab}$

b) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{2} = 3\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{28}{3+\sqrt{2}} = \frac{28\cdot(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{2})} = \frac{28\cdot(3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{28\cdot(3-\sqrt{2})}{7} = 4\cdot(3-\sqrt{2}) = 12-4\sqrt{2}$

3. Löse die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sqrt{3x-21} = x-7 \\ \Rightarrow\ &3x-21 = x^2-14x+49 \\ \Rightarrow\ &0 = x^2-17x+70 \\ \overset{\text{MNF}}{\Rightarrow}\ &x_1 = 10,\ x_2 = 7 \end{aligned}$$

3.8 Logarithmen

3.8.1 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0,\ b \neq 1$. Die eindeutig bestimmte Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $b^x = a$ heißt Logarithmus von a zur Basis b. Sie wird mit $x = \log_b a$ bezeichnet.

Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert, da für $a, b \leq 0$ die Gleichung nicht immer lösbar ist. Ist zum Beispiel a negativ und b positiv, so existiert kein x, das die Gleichung erfüllt. Der Fall $b = 1$ muss ausgeschlossen werden, da 1^x immer den Wert Eins hat, das heißt die Gleichung ist nur für $a = 1$ lösbar, aber dann nicht eindeutig bestimmt (da unendlich viele Lösungen existieren).

Beispiele: $\log_2 1024 = 10$, da $2^{10} = 1024$
$\log_{10} 1000 = 3$, da $10^3 = 1000$
$\log_2 \frac{1}{2} = -1$, da $2^{-1} = \frac{1}{2}$

Der Logarithmus zur Basis 10 kann mit lg, der Logarithmus naturalis (mit der Eulerschen Zahl $e \approx 2,718281828$ als Basis) mit ln abgekürzt werden. Wird log ohne Basis angegeben, so muss aus dem Kontext gelesen werden, welche Basis gemeint ist.

3.8.2 Wichtige Werte des Logarithmus

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $b \neq 1$ gilt:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $b^{\log_b a} = a$
4. $\log_b b^a = a$

3.8.3 Logarithmusgesetze

Seien im Folgenden $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $c \neq 1$. Dann gilt:

1. $\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$
2. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$
3. $\log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$, wenn zusätzlich gilt $a \neq 1$
4. $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$

3.8.4 Übungen

1. Berechne:
   a) $\log_4 64 = 3$
   b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$
   c) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

   Fasse zusammen:
   a) $\ln 2 + \ln 5 = \ln 10$
   b) $\frac{1}{5}\ln x - \frac{1}{10}\ln x^2 + 3\ln x - \frac{1}{2}\ln x^2 = \frac{1}{5}\ln x - \frac{2}{10}\ln x + 3\ln x - \frac{2}{2}\ln x = 2\ln x$

2. Schreibe als Summe:
   a) $\ln\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{5} = \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 5) = -\frac{1}{2}\ln 5$

3. Löse die Gleichungen:
   a) $\log_3(x-1) = 2 \iff x - 1 = 2^3 \iff x = 9$
   b) $\log_2 x = \log_3 x \Rightarrow x = 1$
   c)
$$\begin{aligned} & \lg(5x) + \lg 2 = 4 - \lg(4x) \\ \iff & \lg(5x) + \lg(2) + \lg(4x) = 4 \\ \iff & \lg(5x \cdot 2 \cdot 4x) = 4 \\ \iff & \lg(40x^2) = 4 \\ \iff & 40x^2 = 10^4 \\ \iff & x^2 = 25000 \\ & \Rightarrow x = +50 \quad \text{(negative Lösung fällt weg, wegen } \lg) \end{aligned}$$

   d)
$$\begin{aligned} & \left(7^{x-1}\right)^{x+2} = \left(7^{x+2}\right)^{x+5} \\ \iff & 7^{(x-1)(x+2)} = 7^{(x+2)(x+5)} \\ \iff & (x-1)(x+2) = (x+2)(x+5) \\ & \text{Fall 1: } x \neq -2: \\ \iff & x - 1 = x + 5 \\ \iff & -1 = 5 \ ↯ \\ & \text{Fall 2: } x = -2 \ \checkmark \end{aligned}$$

   e)
$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3^{x+6}} = \sqrt[4]{3^{2x-2}} \\ \iff & 3^{\frac{1}{3}(x+6)} = 3^{\frac{1}{4}(2x-2)} \\ \iff & \frac{1}{3}(x+6) = \frac{1}{4}(2x-2) \\ \iff & 4 \cdot (x+6) = 3 \cdot (2x-2) \\ \iff & 4x + 24 = 6x - 6 \\ \iff & 30 = 2x \\ \iff & x = 15 \end{aligned}$$

4 Summen- und Produktzeichen

4.1 Summenzeichen

4.1.1 Definition

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $k, n \in \mathbb{Z}$. Die Summe der Zahlen $a_k, \dots, a_n$ wird bezeichnet mit

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + \cdots + a_n$$

Der Index i ist hierbei die Laufvariable (von $i = k$ bis $i = n$), wie man es von der Programmierung mit for-Schleifen her vielleicht schon kennt.

4.1.2 Beispiele

1. $\sum\limits_{i=1}^{7} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
2. $\sum\limits_{i=1}^{2} \log_2 i = \log_2 1 + \log_2 2 = 0 + 1 = 1$
3. $\sum\limits_{i=2}^{4} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$
4. $3+5+7+9+11+\cdots+23 = (2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+\cdots+(2\cdot 11+1) = \sum\limits_{i=1}^{11}(2i+1)$
5. $1 + 5 + 25 + 125 + 625 = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = \sum\limits_{i=0}^{4} 5^i$

4.1.3 Spezialfälle

1. Ist die untere Summationsgrenze geich der oberen, bedeutet dies, dass die Summe nur aus einem Summanden besteht:
$$\sum_{i=k}^{k} a_i = a_k$$
2. Ist die untere Summationsgrenze größer als die obere Summationsgrenze, wird das Ergebnis der Summe als Null definiert:
Formal: Seien $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $k > n$. Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{n} a_i = 0$.

4.1.4 Rechenregeln

Seien im Folgenden $a_k, \dots, a_n, b_k, \dots, b_n, c, d \in \mathbb{R}$ und $k, n \in \mathbb{Z}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. $\sum\limits_{i=k}^{n} a_i = a_k + \cdots + a_\ell + a_{\ell+1} + \cdots + a_n = \sum\limits_{i=k}^{\ell} a_i + \sum\limits_{i=\ell+1}^{n} a_i$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $k \leq \ell \leq n$.
2. $\sum\limits_{i=k}^{n} (c \cdot a_i) = ca_k + ca_2k + 1 + \cdots + ca_n = c \cdot (a_k + \cdots + a_n) = c \sum\limits_{i=k}^{n} a_i$

3.

$$\sum_{i=k}^{n}(a_i+b_i) = (a_k+b_k)+(a_{k+1}+b_{k+1})+\cdots+(a_n+b_n)$$
$$= (a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n)+(b_k+b_{k+1}+\cdots+b_n)$$
$$= \sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i$$

4.1.5 Indexverschiebung

Manchmal will man die Summationsgrenzen einer Summe verschieben. Dabei ändert sich der Wert der Summe nicht, aber die Indizes werden nach oben/unten verschoben:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k\pm\ell}^{n\pm\ell} a_{i\mp\ell}$$

4.1.6 Beispiele

1. $\sum\limits_{i=2}^{4}(i-1) = \sum\limits_{i=2-1}^{4-1}(i+1-1) = \sum\limits_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$

2.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1-1}^{n-1} a_{i+1-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n\right) - \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)$$
$$= a_n - a_0$$

4.2 Produktzeichen

Analog zum Summenzeichen wird das Produktzeichen definiert.

4.2.1 Definition

Seien $a_k, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und k, $n \in \mathbb{Z}$. Das Produkt der Zahlen $a_k, \ldots, a_n$ wird bezeichnet mit

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot \ldots \cdot a_n$$

Das leere Produkt $\prod\limits_{i=k}^{n} a_i$ mit $n < k$ wird hierbei definiert als Eins.

4.2.2 Übungen

1. Schreibe mit Summenzeichen:

a)

$$\begin{aligned}-1+4+9+14+19 &= -1+(5-1)+(10-1)+(15-1)+(20-1)\\ &= (5\cdot 0-1)+(5\cdot 1-1)+(5\cdot 2-1)+(5\cdot 3-1)+(5\cdot 4-1)\\ &= \sum_{i=1}^{4}(5i-1)\end{aligned}$$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4 = 2^{-2}+2^{-1}+2^{0}+2^{1}+2^{2} = \sum_{i=-2}^{2} 2^i$

2. Berechne:

a) $\sum_{i=1}^{4} 3i = 3\sum_{i=1}^{4} i = 3\cdot(1+2+3+4) = 3\cdot 10 = 30$

b) $\sum_{i=1}^{m} c = \underbrace{c+\ldots+c}_{m-\text{mal}} = mc$

c) $\prod_{k=1}^{4} 2^i = 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4 = 2^{1+2+3+4} = 2^{10} = 1024$

d)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} ij &= \sum_{i=1}^{4} i\sum_{j=1}^{4} j\\ &= \sum_{i=1}^{4} i\cdot(1+2+3+4)\\ &= 10\sum_{i=1}^{4} i\\ &= 10\cdot(1+2+3+4)\\ &= 10\cdot 10\\ &= 100\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{10}(2i-3) - 2\sum_{i=1}^{8} i - 8 &= 2\sum_{i=3}^{10} i - \sum_{i=3}^{10} 3 - 2\sum_{i=1}^{8} i - 8\\ &= 2\sum_{i=3-2}^{10-2}(i+2) - \sum_{i=3}^{10} 3 - 2\sum_{i=1}^{8} i - 8\\ &= 2\sum_{i=1}^{8} i + 2\sum_{i=1}^{8} 2 - \sum_{i=3}^{10} 3 - 2\sum_{i=1}^{8} i - 8\\ &= 2\sum_{i=1}^{8} 2 - \sum_{i=3}^{10} 3 - 8\\ &= 2\cdot 8\cdot 2 - 8\cdot 3 - 8\\ &= 0\end{aligned}$$

4.3 Fakultät und Binomialkoeffizient

4.3.1 Defintion (Fakultät)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

Dabei wird $n!$ gelesen als „n Fakultät“.

Beispiele: $6! = \prod_{i=1}^{6} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$0! = \prod_{i=1}^{0} i = 1$

4.3.2 Defintion (Binomialkoeffizient)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

der Binomialkoeffizient.
Dabei wird $\binom{n}{k}$ gelesen als „n über k“.

Beispiel: $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

4.3.3 Binomiallehrsatz

Mithilfe der Binomialkoeffizienten können wir die binomischen Formeln für allgemeine Potenzen erweitern. Es gilt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dabei lässt sich die Formel aufgrund der Kommutativität der Addition genauso schreiben als

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Setzt man statt b einfach $-b$ ein, erhält man die Verallgemeinerung der zweiten binomischen Formel:

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-1)^k b^k$$

4.3.4 Pascale'sches Dreieck

Wegen $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ können wir die dazu benötigten Binomialkoeffizienten mithilfe des Pascale'schen Dreiecks berechnen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{0}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

5 Beweise

In diesem Abschnitt wollen wir vorführen, wie mathematische Beweise strukturiert sein sollen und auf was zu achten ist.

5.1 Behauptung - Beweis

Ein mathematischer Satz besteht immer aus zwei Teilen: Einer Behauptung in Form einer Aussage und einem Beweis der Gültigkeit dieser Behauptung. Dabei besteht die Behauptung selbst aus Voraussetzungen und der daraus resultierenden Schlussfolgerung.
Beispiel:

Behauptung: $\underbrace{\text{Seien } m \text{ und } n \text{ gerade Zahlen.}}_{\text{Voraussetzung}}$ $\underbrace{\text{Dann ist auch } m+n \text{ gerade.}}_{\text{Schlussfolgerung}}$

Beweis: Seien m, n gerade Zahlen. Das heißt es gibt zwei ganze Zahlen m' und n', für die gilt: $m = 2m'$ und $n = 2n'$. Dann ist

$$m + n = 2m' + 2n' = 2(m' + n'),$$

also $m + n$ auch gerade. $\square$

Das Ende eines Beweises markieren wir oft durch das Symbol $\square$ wozu wir sagen „Beweis abgeschlossen“. Hierfür sieht man auch viele andere Symbole, wie zum Beispiel: q.e.d. (quod erat demonstrandum, aus dem Lateinischen: was zu zeigen war) oder auch $\blacksquare$.

Bei einem selbst durchgeführten Beweis ist es immer klug darauf zu achten, ob alle Voraussetzungen verwendet wurden. Ist dies nicht der Fall, ist mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Fehler im Beweis, da mathematische Aussagen normalerweise nur die nötigsten Voraussetzungen fordern. So kann zum Beispiel obige Behauptung nicht bewiesen werden, wenn wir in unserem Beweis nur von beliebigen ganzen Zahlen anstatt von geraden Zahlen ausgegangen wären.

5.2 Axiome

Zum Beweis einer Aussage dürfen immer nur diejenigen Aussagen verwendet werden, die bisher schon gezeigt wurden. Das Grundgerüst dazu bilden Axiome, also unstrittige Voraussetzungen, auf denen die gesamte Mathematik aufgebaut ist. Zum Beispiel werden die natürlichen Zahlen formal mithilfe der Peano-Axiome eingeführt, was wir hier aber vermeiden wollen, da dies sehr viel Zeit in Anspruch nehmen würde.
Vorsicht mit Sätzen aus der Schule! Da diese nur selten bewiesen werden, darf man sie nicht in Beweisen benutzen.

5.3 Begriffe

Je nach Art und Wichtigkeit einer Aussage unterscheiden wir mit folgenden Namen:

- Definition: Eine Namensgebung für einen Sachverhalt.
- Satz: Eine wichtige Aussage.
- Theorem: Eine sehr wichtige Aussage.
- Lemma: Ein Hilfssatz, zur Hinführung auf einen Satz.
- Korollar: Eine direkte Folgerung aus einem Satz.

5.4 Genau dann, wenn

Die Aussage A genau dann, wenn B, also $A \iff B$, zeigen wir meist durch die beiden Richtungen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, da wir in 1.4.2 deren Äquivalenz bewiesen haben.

5.5 Quantoren

5.5.1 Verwendung von Beispielen

Aufpassen muss man bei der Verwendung von Beispielen.
Wollen wir eine Aussage mit Allquantor beweisen, reichen Beispiele nicht aus, da die Aussage für *jedes* Element bewiesen werden muss. Hier tappt man sonst leicht in die Falle, da es Aussagen gibt, die für sehr viele Beispiele korrekt sind, aber nicht im Allgemeinen gelten. Bei kleinen endlichen Mengen kann es zwar möglich sein, die Aussage für jedes Element einzeln nachzurechnen, bei unendlichen Mengen ist dies jedoch nicht möglich. Das sollte aber niemanden davon abhalten, sich selbst Beispiele zum besseren Verständnis der Aussage zu machen!
Wollen wir wiederum eine Aussage mit Existenzquantor beweisen, genügt es uns, die Aussage für ein Beispiel zu beweisen. Denn wenn wir ein spezielles Beispiel angeben können, so ist die Existenz eines solchen gewiss.
Kommt ein Existenzquantor in einer Voraussetzung vor, können wir mit dem gegebenen Element arbeiten, ohne den konkreten Wert zu kennen.

Beispiele:

- **Behauptung:** $\forall x \in \{1, 3, 6, 7\} : x < 10$.

  Beweis: Lassen wir hier x nacheinander alle Werte aus $\{1, 3, 6, 7\}$ annehmen, so können wir die Aussage für jedes Element aus der Menge zeigen: $1 < 10, 3 < 10, 6 < 10$ und $7 < 10$. Wir haben damit die komplette Aussage bewiesen. $\square$

- **Behauptung:** $\forall a, b \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

  Erklärung: Hier können wir nicht mehr alle möglichen Beispiele durchrechnen, da dies unendlich viele sind.

  Beweis: siehe (5.9 Beispiel)

- **Behauptung:** $\exists x \in \{1, 3, 6, 7\} : x$ ist gerade.

  Beweis: Wählen wir hier $x = 6$, so ist x gerade. Also gibt es ein x in $\{1, 3, 6, 7\}$, das gerade ist. $\square$

- **Behauptung:** Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 - n + 41$ im Allgemeinen *keine* Primzahl.

  Erklärung: Beginnt man hier, sich Beispiele zu überlegen, besteht die Gefahr zu glauben, dass die Formeln nur Primzahlen liefert. Dies kommt davon, dass für $1 \leq n \leq 40$ tatsächlich nur Primzahlen herauskommen.

  Beweis: Wählen wir $n = 41$, so ergibt sich die Zahl $n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, welche offensichtlich keine Primzahl ist, da sie Quadratzahl ist. $\square$

5.5.2 Verneinung von Quantoren

Wollen wir zeigen, dass eine Eigenschaft nicht für alle $x \in M$ gilt, so ist ein $x \in M$ ausreichend, das diese Eigenschaft nicht mehr erfüllt. Damit gilt:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$$

Ebenso muss eine Eigenschaft für alle Elemente nicht erfüllt sein, damit wir sagen können, dass kein Element existiert, das diese Eigenschaft besitzt. Damit gilt:

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$$

Beispiel: Betrachten wir die oben gemachte Aussage $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$ diesmal für $\mathbb{Z}$, also $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1$, so gilt diese nicht mehr:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1) &\iff \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \neg(\exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1) \\ &\iff \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \forall y \in \mathbb{Z} : \neg(xy = 1) \\ &\iff \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \forall y \in \mathbb{Z} : \ xy \neq 1 \end{aligned}$$

Wählen wir zum Beispiel $x = 2$, so ist für alle ganzen Zahlen y schon $xy \neq 1$.

5.6 Zyklisches Beweisverfahren

Wollen wir beweisen, dass mehrere Aussagen äquivalent sind, so können wir dies mithilfe mehrerer Folgerungen zeigen. Angenommen wir wollen die Äquivalenz der Aussagen A, B, C, D zeigen. Ohne den Zirkelschluss müssten wir zeigen:

$$(A \iff B) \wedge (A \iff C) \wedge (A \iff D) \wedge (B \iff C) \wedge (B \iff D) \wedge (C \iff D)$$

Wir müssen dabei daran denken, dass $\iff$ meist in zwei Richtungen gezeigt wird. Es sind hier also zwölf Richtungen zu zeigen
Mit den Zirkelschluss müssen wir nur noch folgende vier Aussagen zeigen:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow A)$$

Dies recht aus, da wir so implizit schon alle zwölf Richtungen gezeigt haben. Zum Beispiel folgt die Aussage $C \Rightarrow B$ durch $C \Rightarrow D \Rightarrow A \Rightarrow B$.

5.7 Indirekte Beweise

Allgemein sind wir daran interessiert, die Aussage $A \Rightarrow B$ zu zeigen. Dabei spielt A die Rolle der Voraussetzung und B die daraus ableitbare Aussage. Manchmal können wir die Aussage $A \Rightarrow B$ nicht direkt zeigen oder der direkte Weg ist komplizierter als eine dazu äquivalente Aussage zu zeigen. Dann können wir eine der folgenden Beweisverfahren verwenden:

5.7.1 Kontraposition

Behauptung: $(A \Rightarrow B)$ ist äquivalent zu $(\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Beweis: Wir stellen dazu die Wahrheitstafel auf:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

□

Wir können also eine Aussage B auch aus den Voraussetzungen A folgern, indem wir von der negierten Schlussfolgerung $\neg B$ ausgehen und zeigen, dass dann die Voraussetzungen auch nicht erfüllt sein können ($\neg A$).

Beispiel:

Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.

Erklärung: Wir zeigen die Aussage durch einen indirekten Beweis. Wir wollen also die Aussage „Ist n nicht gerade, so ist auch n^2 nicht gerade“ beweisen.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$.
Ist n nicht gerade, also ungerade, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k+1$. Dann gilt aber $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ und damit ist n^2 auch ungerade, also nicht gerade, und damit die Aussage bewiesen. □

5.7.2 Widerspruch

Wollen wir die Aussage A beweisen, so können wir folgendermaßen vorgehen:
Wir gehen davon aus, die Aussage A gelte nicht. Nun versuchen wir durch logische Schlüsse eine zweite Aussage B aus A zu folgern. Von dieser Aussage B wissen wir aber, dass sie falsch ist. Haben wir diesen Widerspruch erkannt, so kennzeichnen wir ihn mit einem Blitz $\lightning$. Es muss also $\neg A$ falsch gewesen sein und damit A eine wahre Aussage.

Die Korrektheit dieses Beweisverfahrens beruht auf folgender Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B$	$(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)$	$(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1

Da die Aussage $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ immer wahr ist (Tautologie genannt) und wir in unserem Beweis den ersten Teil der Aussage, also $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B))$, zeigen, muss nun also A gelten.

Beispiel: Die Irrationalität von $\sqrt{2}$
Euklid lieferte schon ca. 300 v. Chr. in seinem Buch „Elemente“ einen zahlentheoretischen Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Auf der 1999 von den Mathematikern Paul und Jack Abad präsentierten Liste der 100 wichtigsten mathematischen Sätze taucht unter anderem auch diese Aussage auf:

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Angenommen $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen a und b, so dass für den vollständig gekürzten Bruch $\frac{a}{b}$ gilt $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Also gilt auch $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \sqrt{2}^2 = 2$, oder umgeformt $a^2 = 2b^2$. Somit muss a^2 eine gerade Zahl sein. Das geht nur, wenn a selbst schon gerade ist (siehe 5.7.1 Beispiel). Also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$. Es gilt damit auch $(2k)^2 = a^2 = 2b^2$ oder umgeformt $4k^2 = 2b^2$. Kürzen wir nun mit 2, erhalten wir $2k^2 = b^2$. Damit ist aber auch b^2 und damit b gerade. Also lässt sich der Bruch $\frac{a}{b}$ mindestens mit 2 kürzen. $\lightning$
Also war die Annahme falsch und somit muss $\sqrt{2}$ irrational sein. □

5.8 Fallunterscheidung

Können wir eine Aussage nicht direkt für alle Elemente zeigen, weil diese sich bezüglich einer wichtigen Eigenschaft unterscheiden, so bietet sich eine Fallunterscheidung an. Dabei werden Elemente, die sich in dieser Eigenschaft gleichen, zu einem Fall zusammengefasst.

Beispiel:

Behauptung: Es gibt zwei irrationale Zahlen x und y, so dass x^y eine rationale Zahl ist.

Beweis:

Fall 1: Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational.
Wähle $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{2}$, also x und y irrational.
Dann ist x^y nach Annahme rational.

Fall 2: Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational.
Wähle $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$, also x (nach Annahme) und y irrational.
Dann ist $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ und damit rational.

□

Wir sehen, dass wir diesen Satz sogar beweisen können, ohne zu wissen, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist. Tatsächlich kann man zeigen, dass $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist.

5.9 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Die Abkürzung o.B.d.A. bedeutet ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Wir wollen damit aussagen, dass nur ein Teil der Aussage wirklich bewiesen wird, die Gesamtaussage daraus aber einfach gefolgert werden kann.

Beispiel:

Behauptung: Seien a und b positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.
Es ist o.B.d.A $a \geq b$ (ansonsten vertausche die Bezeichnungen von a und b).
Es gibt also ein $x \geq 0$ mit $a = b + x$. Dann ist auch $\frac{x^2}{4} \geq 0$ und damit

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &= \frac{(b+x)+b}{2} \\
&= \frac{2b}{2} + \frac{x}{2} \\
&= b + \frac{x}{2} \\
&= \sqrt{\left(b + \frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{b^2 + 2b\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{b^2 + bx + \frac{x^2}{4}} \\
&\overset{\frac{x^2}{4}\geq 0}{\geq} \sqrt{b^2 + bx} \\
&= \sqrt{(b+x)\cdot b} \\
&= \sqrt{a \cdot b}
\end{aligned}$$

□

5.10 Vollständige Induktion

5.10.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest. Für jedes $n \geq n_0$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte:

- $A(n_0)$ ist wahr.
- Für jedes $n \geq n_0$ ist '$A(n) \Rightarrow A(n+1)$' wahr.

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ wahr.

5.10.2 Erklärung

Wollen wir von einer Aussage zeigen, dass sie für *alle natürlichen Zahlen* (oder ab einem bestimmten Wert an) gilt, so teilen wir den Beweis in 3 Teile auf:

- Den Induktionsanfang (IA) beim kleinsten Element n_0 rechnen wir für diese feste Zahl einfach nach.
- In der Induktionsvoraussetzung (IV) legen wir die Grundlage für den Induktionsschritt, indem wir von der Richtigkeit der Aussage für ein beliebiges aber festes $n \geq n_0$ ausgehen.
- Im Induktionsschritt (IS) versuchen wir nun die Aussage, basierend auf der Induktionsvoraussetzung, auch für $n+1$ zu zeigen. Wir formen den linken Teil der Aussage für $n+1$ dazu so um, dass ein Teil dessen nur noch in Abhängigkeit von n steht. Nun setzen wir für diesen mithilfe der Induktionsvoraussetzung den rechten Teil der Behauptung ein. Wenn wir jetzt den gesamten Term wieder in den rechten Teil der Aussage für $n+1$ umformen, so sind wir fertig.

Nun ergibt sich die Aussage folgendermaßen für alle Zahlen $n \geq n_0$:
Im Induktionsanfang zeigen wir, dass die Aussage für n_0 gilt. In der Induktionsvoraussetzung setzen wir nun in Gedanken $n := n_0$. Im Induktionsschritt haben wir gezeigt, dass die Aussage also auch für $n+1 = n_0+1$ gilt. Nun setzen wir in der IV $n := n_0+1$ und zeigen im IS, dass die Aussage für $n+1 = (n_0+1)+1 = n_0+2$ gilt. Dann $n := n_0+2$, also gilt die Aussage auch für $n+1 = (n_0+2)+1 = n_0+3$ und so weiter.

5.10.3 Beispiele

1. **Behauptung:** Der kleine Gauß

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: IA ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

IS ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

□

2. **Behauptung:**

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis: IA ($n = 0$):
(Wir müssen hier bei 0 anfangen, da die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten soll!)

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6}$$

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.
IS ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n^2+2n+1) \\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6} \\ &= \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \\ &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

□

3. **Behauptung:**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Beweis: IA $(n = 1)$:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

IS $(n \to n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + (2n+2-1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

□

4. **Behauptung:** Bernoulli-Ungleichung

Für $-1 < x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: Sei $-1 < x \in \mathbb{R}$ beliebig.

IA $(n = 1)$:

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$$

also insbesondere:

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$$

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

IS $(n \to n+1)$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\ &\overset{\text{IV}}{\geq} (1+nx) \cdot (1+x) \\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + nx + x \\ &= 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

□

5. **Behauptung:** Geometrische Reihe

Für $1 \neq q \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis: Sei $1 \neq q \in \mathbb{R}$ beliebig.

IA ($n = 0$):

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$$

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

IS ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1} \cdot (1-q)}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

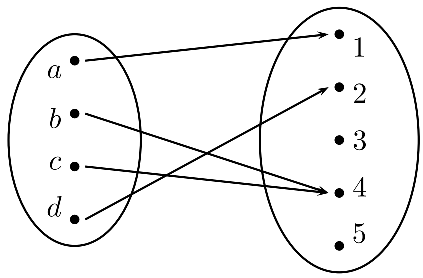
$\square$

6 Abbildungen

6.1 Definition

Seien M, N nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N : x \mapsto f(x)$ (gesprochen „f von M nach N mit x bildet ab auf $f(x)$“) ist eine Zuordnung, die *jedem* Element des Definitionsbereichs M *eindeutig* ein Element des Wertebereichs N zuordnet.
Das Bild von $x \in M$ bezeichnen wir mit $f(x) \in N$, x selbst wird Urbild von $f(x)$ genannt. Der Bildbereich $f(M) := \{f(x) : x \in M\} \subseteq N$ sind alle Punkte, die durch die Abbildung f von der Menge M aus erreichbar sind.

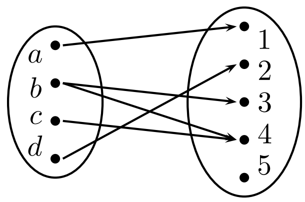
Beispiel: Sei $M := \{a, b, c, d\}$ und $N := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $f : M \to N$ mit $a \mapsto 1,\ b \mapsto 4,\ c \mapsto 4,\ d \mapsto 2$. Dann können wir die Abbildungen auch verkürzt in der Form $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ schreiben.



Keine gültigen Abbildungen sind hingegen zum Beispiel

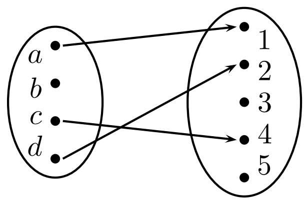
- $\begin{pmatrix} a & b & b & c & d \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

  Hier hat b kein eindeutiges Bild.



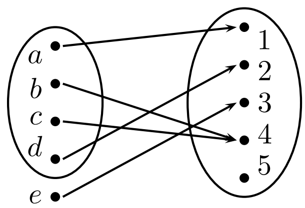
- $\begin{pmatrix} a & c & d \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

  Hier wird b gar kein Bild zugeordnet.



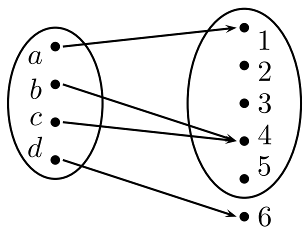
- $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

  Hier wird dem Element e, das nicht im Definitionsbereich der Abbildung ist, ein Bild zugeordnet.



- $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

  Hier wird dem Element d ein Bild zugeordnet, das nicht im Wertebereich der Abbildung ist.



6.2 Injektive Abbildungen

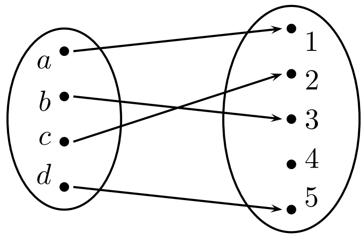
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv, wenn gilt:

$$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

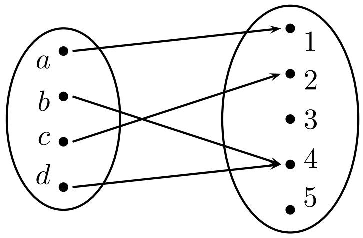
Alternativ lässt sich auch nachweisen (siehe 5.7.1 Kontraposition):

$$\forall x, y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

In Worten: Für jedes Element im Wertebereich gibt es *höchstens* ein Urbild.



injektive Abbildung



nicht injektive Abbildung

6.3 Surjektive Abbildungen

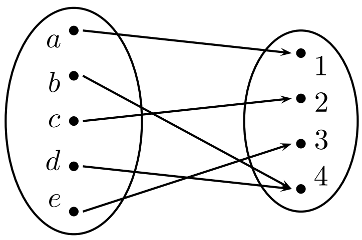
Eine Abbildung f heißt surjektiv, wenn gilt:

$$f(M) = N$$

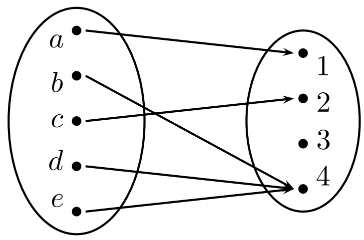
Dies ist äquivalent zu

$$\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y$$

In Worten: Für jedes Element im Wertebereich gibt es *mindestens* ein Urbild.



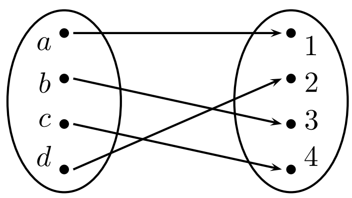
surjektive Abbildung



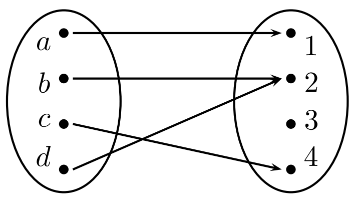
nicht surjektive Abbildung

6.4 Bijektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
In Worten: Für jedes Element im Wertebereich gibt es *genau* ein Urbild.



bijektive Abbildung



nicht bijektive Abbildung

6.5 Übungen

Seien $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $N := \{a, b, c\}$. Findet jeweils heraus, welche Art von Abbildung vorliegt:

1. $f : M \to N$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & c \end{pmatrix}$
   - Abbildung ✓ Jedem Element des Definitionsbereichs wird eindeutig ein Wert des Wertebereichs zugeordnet.

- injektiv $\lightning$ Es ist $f(2) = f(4)$, aber $2 \neq 4$.
- surjektiv ✓ Alle Elemente aus N werden getroffen.
- bijektiv $\lightning$ Die Abbildung ist nicht injektiv, also auch nicht bijektiv.

2. $g : M \to N$ mit $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ b & a & c \end{pmatrix}$
   - Abbildung $\lightning$ Da 2 kein Bild zugeordnet bekommt, ist g keine Abbildung. Also sind Injektivität, Surjektivität und Bijektivität ausgeschlossen.
3. $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$
   - Abbildung ✓ Jedem Element des Definitionsbereichs wird eindeutig ein Wert des Wertebereichs zugeordnet.
   - injektiv ✓ Kein Element des Wertebereichs wird doppelt getroffen.
   - surjektiv ✓ Alle Elemente aus N werden getroffen.
   - bijektiv ✓ Die Abbildung ist injektiv und surjektiv, also auch bijektiv.
4. $\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x$
   - Abbildung ✓ Jedem Element des Definitionsbereichs wird eindeutig ein Wert des Wertebereichs zugeordnet.
   - injektiv ✓ Kein Element des Wertebereichs wird doppelt getroffen.
   - surjektiv $\lightning$ Das Element $-1 \in \mathbb{Z}$ wird nicht getroffen.
   - bijektiv $\lightning$ Die Abbildung ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv.
5. $|\cdot| : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto |x|$
   - Abbildung ✓ Jedem Element des Definitionsbereichs wird eindeutig ein Wert des Wertebereichs zugeordnet.
   - injektiv $\lightning$ Es ist zum Beispiel $|-1| = 1 = |1|$, aber $-1 \neq 1$.
   - surjektiv $\lightning$ Das Element $-1 \in \mathbb{Q}$ wird nicht getroffen.
   - bijektiv $\lightning$ Die Abbildung ist weder injektiv noch surjektiv, also auch nicht bijektiv.
6. $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$
   - Abbildung ✓ Jedem Element des Definitionsbereichs wird eindeutig ein Wert des Wertebereichs zugeordnet.
   - injektiv ✓ Kein Element des Wertebereichs wird doppelt getroffen.
   - surjektiv $\lightning$ Das Element 1 wird nicht getroffen.
   - bijektiv $\lightning$ Die Abbildung ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv.
7. $\mathrm{succ} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$
   - Abbildung ✓ Jedem Element des Definitionsbereichs wird eindeutig ein Wert des Wertebereichs zugeordnet.
   - injektiv ✓ Kein Element des Wertebereichs wird doppelt getroffen.
   - surjektiv ✓ Nun wird jedes Element des Wertebereichs getroffen.
   - bijektiv ✓ Die Abbildung ist sowohl injektiv, als auch surjektiv, also bijektiv.

6.6 Hintereinanderausführung von Abbildungen

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei Abbildungen.
Dann heißt die Abbildung $g \circ f : M \to P : x \mapsto g(f(x))$ (gesprochen „g nach f“), die Hintereinanderausführung der Abbildungen f und g.

6.6.1 Assoziativgesetz

Behauptung: Seien $f : M \to N$, $g : N \to P$ und $h : P \to Q$ Abbildungen. Dann gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x)\end{aligned}$$

□

6.6.2 Kommutativgesetz

Behauptung: Die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist *nicht* kommutativ.
(Das heißt es gibt Abbildungen f und g, sodass $g \circ f \neq f \circ g$)

Beweis: Betrachte dazu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.
Dann gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ \neq x^2 + 1 = f(x^2) = f(g(x)) &= (f \circ g)(x)\end{aligned}$$

□

6.7 Umkehrabbildung

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. f ist bijektiv.
2. Es gibt eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$. g ist eindeutig bestimmt und heißt Umkehrabbildung oder inverse Abbildung f^{-1} zu f.

6.8 Kardinalität von Mengen

Eine Menge M heißt endlich, wenn sie leer ist, oder es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ auf M gibt. Wir sagen dann M hat n Elemente und schreiben dafür $|M| = n$ oder auch $\#M = n$. Eine nicht-endliche Menge M heißt unendlich. Wir schreiben $|M| = \infty$. Sie heißt abzählbar unendlich oder kurz abzählbar, falls es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf M gibt. Andernfalls heißt sie überabzählbar.

Beispiel: $|\{2, 3, 5, 7\}| = 4$, $|\emptyset| = 0$, $|\mathbb{Z}| = \infty$.

6.9 Hilbert's Hotel

Wir nehmen an, es gäbe ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern. Nun kommt ein Bus mit unendlich vielen Sitzplätzen und das bisher leere Hotel wird somit ausgebucht. Besucher von Sitzplatz 1 bekommt Hotelzimmer 1, usw.

Jetzt will der Besitzer David Hilbert selbst in seinem Hotel übernachten. Ist dies möglich, obwohl das Hotel schon ausgebucht ist. Wenn ja, wie?

Ja es ist möglich, indem Hotelgast von Zimmer 1 in Zimmer 2, Hotelgast von Zimmer 2 in Zimmer 3, usw. geht. Dabei wird Zimmer 1 frei und Hilbert kann dort übernachten.

In einem anderen Fall kommt ein Bus mit Hilberts unendlich großer Verwandschaft an. Schafft Hilbert es auch hier wieder, seine Familie unterzubringen?
Auch dies ist möglich. Er versetzt Gast 1 in Zimmer 1, Gast 2 in Zimmer 3, Gast 3 in Zimmer 5 usw. Damit sind alle geraden Zimmer frei und diese vergibt er an seine Familie: Familienmitglied 1 in Zimmer 2, Mitglied 2 in Zimmer 4, Mitglied 3 in Zimmer 6 usw.

6.10 Mathematisches Analogon

Analog zum ersten Fall in Hilberts Hotel betrachten wir Folgendes:

Behauptung: $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ haben die gleiche Kardinalität (Hilbert ist Gast 0).

Beweis: Betrachte dazu die in (6.5.7) definierte Abbildung $\mathrm{succ} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$. Wir haben dort herausgefunden, dass diese Abbildung bijektiv ist, also die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ gleiche Kardinalität besitzen. □

Der zweite Fall veranschaulicht Folgendes:

Behauptung: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ haben die gleiche Kardinalität.

Erklärung: Betrachte dazu, dass die positiven Zahlen die schon vorhandenen Hotelgäste sind und die negativen Zahlen die neu eintreffende Verwandschaft ist. Damit stellen die Personen die ganzen Zahlen dar. Das Problem besteht nun darin alle Gäste auf nur positiv durchnummerierte Zimmer (also die natürlichen Zahlen) zu verteilen.

Beweis: Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -2x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

bijektiv ist. Dazu versuchen wir den Satz 6.7 über Umkehrabbildungen zu verwenden. Betrachte also die Abbildung:

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade} \\ \frac{x-1}{2} & \text{falls } x \ \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Dann ist für $x \in \mathbb{Z}$ mit
  - Fall 1: $x \geq 0$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(2x+1) \overset{\substack{2x+1 \\ \text{ungerade}}}{=} \frac{(2x+1)-1}{2} = x$$

  - Fall 2: $x < 0$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(-2x) \overset{\substack{-2x \\ \text{gerade}}}{=} -\frac{-2x}{2} = x$$

  Also ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.
- Für $x \in \mathbb{N}$ gilt
  - Fall 1: x gerade (also $-\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}_{<0}$)

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi\left(-\frac{x}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

– Fall 2: x ungerade (also $\frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = (x-1) + 1 = x$$

Also ist $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Nach (6.7) ist φ also bijektiv. $\square$

7 Folgen

7.1 Definition

Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $A_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$.
Eine Abbildung $u : A_k \to \mathbb{R}$ heißt bei k beginnende Folge reeller Zahlen, in Zeichen: $(u_n)_{n \geq k}$.
u_n selbst heißt Glied der Folge oder Folgenglied, n der Index des Folgengliedes.

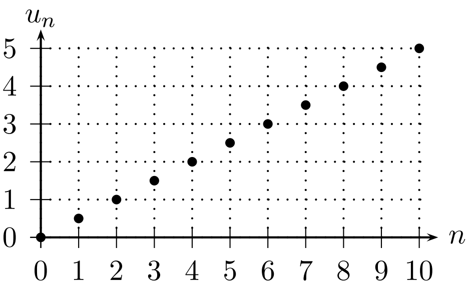
Schreiben wir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so meinen wir $(u_n)_{n \geq 1}$.

7.2 Beispiele

Bestimme jeweils die ersten 5 Folgenglieder und zeichne sie je in ein Koordinatensystem:

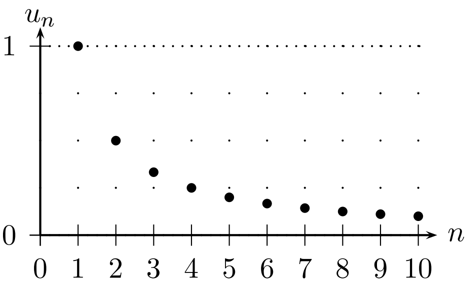
1. $(u_n)_{n \geq 0}$ mit $u_n := \frac{1}{2}n$.

n	0	1	2	3	4
u_n	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2



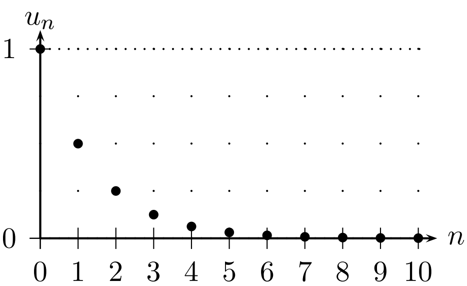
2. $(u_n)_{n \geq 1}$ mit $u_n := \frac{1}{n}$.

n	1	2	3	4	5
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$



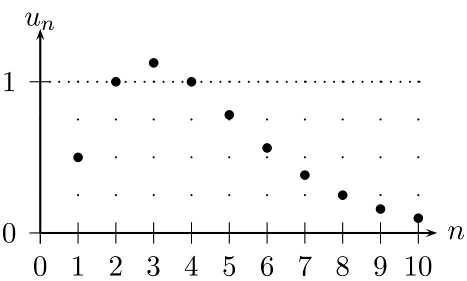
3. $(u_n)_{n \geq 0}$ mit $u_n := 2^{-n}$.

n	0	1	2	3	4
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



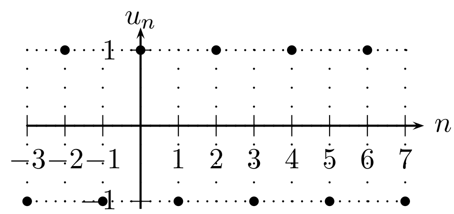
4. $(u_n)_{n \geq 1}$ mit $u_n := \frac{n^2}{2^n}$.

n	1	2	3	4	5
u_n	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{8}$	1	$\frac{25}{32}$



5. $(u_n)_{n \geq -3}$ mit $u_n := (-1)^n$.

n	-3	-2	-1	0	1
u_n	-1	1	-1	1	-1



7.3 Beobachtungen

1. Die Folge geht gegen $\pm\infty$.
2. Die Folge häuft sich an genau einem Punkt.
3. Die Folge häuft sich an mehreren Punkten.
4. Die Folge liegt komplett zwischen zwei Zahlen c und d.

Ziel: Wir wollen Begiffe finden, um diese Eigenschaften von Folgen zu beschreiben.

Im Folgenden bezeichnen wir mit u die Folge $(u_n)_{n\geq k}$.

7.4 Beschränkte Folgen

Die Folge u heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $s \geq 0$ gibt, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $-s \leq u_n \leq s$. Formal geschrieben:

$$\exists s \geq 0 : \forall n \geq k : |u_n| \leq s$$

7.5 Konvergente Folgen, Grenzwert

Die Folge u konvergiert gegen die Zahl c, wenn für jede beliebig kleine positive Zahl ε alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index sich um maximale ε von c unterscheiden.
Formal geschrieben:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) : |u_n - c| < \varepsilon$$

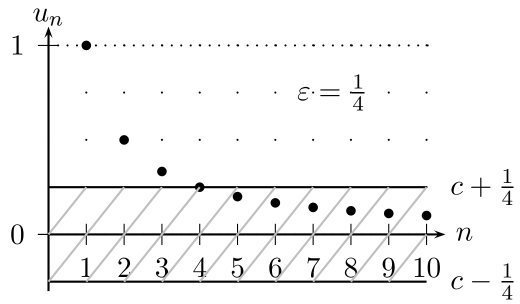
Ist dies erfüllt, schreiben wir

$$c = \lim_{n\to\infty} u_n$$

und sagen c ist *Grenzwert* der Folge.
Ist eine Folge nicht konvergent, so nennen wir sie divergent.
Beispiele:

1. Betrachte die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$. Nehmen wir $c = 0$ und wählen zum Beispiel $\varepsilon = 1$, so ist obige Aussage für jedes $n(\varepsilon) \geq 2$ erfüllt. Wählen wir hingegegen $\varepsilon = \frac{1}{100}$, müsste $n(\varepsilon) \geq 101$ sein um die Aussage zu erfüllen.

Skizze:



Bei $\varepsilon = \frac{1}{4}$ sind ab dem fünften Glied alle Glieder innerhalb des ε-Schlauchs.

Damit kommen wir zu folgender

Behauptung: Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 0. Formal: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $c := 0$.
Wähle $n(\varepsilon) := \lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \rceil$. Dann gilt für ein beliebiges $n \geq n(\varepsilon)$ schon

$$|u_n - c| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(\varepsilon)} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$\square$

2. Betrachte die Folge $(n)_{n\geq 1}$.
   Egal um welchen Wert c wir hier einen ε-Schlauch legen wollen, wird es immer Folgeglieder geben, die außerhalb dieses Schlauches liegen. Damit erhalten wir die

   Behauptung: Die Folge $(n)_{n\geq 1}$ divergiert.

   Beweis: Wir müssen zeigen, dass die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) : |c - u_n| < \varepsilon$$

   mit einem c für diese Folge *nicht* gilt, also dass die Aussage

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \exists n \geq n(\varepsilon) : |c - u_n| \geq \varepsilon$$

   für jedes beliebige c gilt.
   Da ein negativer Grenzwert bei einer positiven Folge nicht möglich ist, betrachten wir ein beliebiges $c > 0$. Wählen wir dann zum Beispiel $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so ist für ein beliebiges $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und $n := n(\varepsilon) + c$ (also $n \geq n(\varepsilon)$) schon

$$|u_n - c| = |n - c| = |n(\varepsilon) + c - c| = |n(\varepsilon)| \overset{n(\varepsilon)\in\mathbb{N}}{\geq} 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

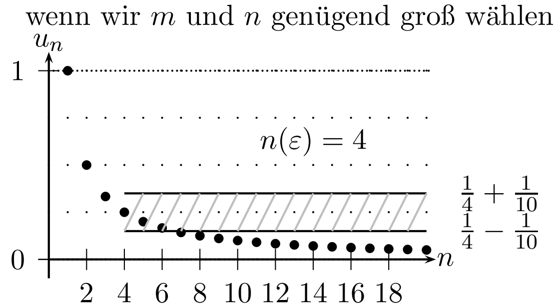
□

7.6 Cauchys Konvergenzkriterium

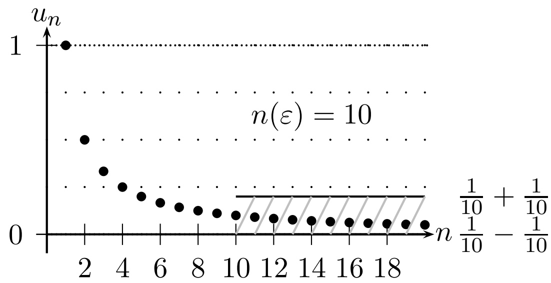
Die Folge u konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall m, n \geq n(\varepsilon) : |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Grob gesprochen: Der Abstand zwischen zwei Folgengliedern u_m und u_n wird beliebig klein, wenn wir m und n genügend groß wählen.



Im Beispiel $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ eine Wahl von $n(\varepsilon) = 4$ noch nicht ausreichend.



$n(\varepsilon) = 10$ reicht aus, da ab dem 10. Folgeglied alle Folgeglieder zwischen 0 und $\frac{2}{10}$ sind, also der Abstand zwischen beliebigen von diesen höchstens noch $\frac{1}{10}$ sein kann.

Vorteil: Die Konvergenz einer Folge kann ohne Wissen über den Grenzwert gezeigt werden.